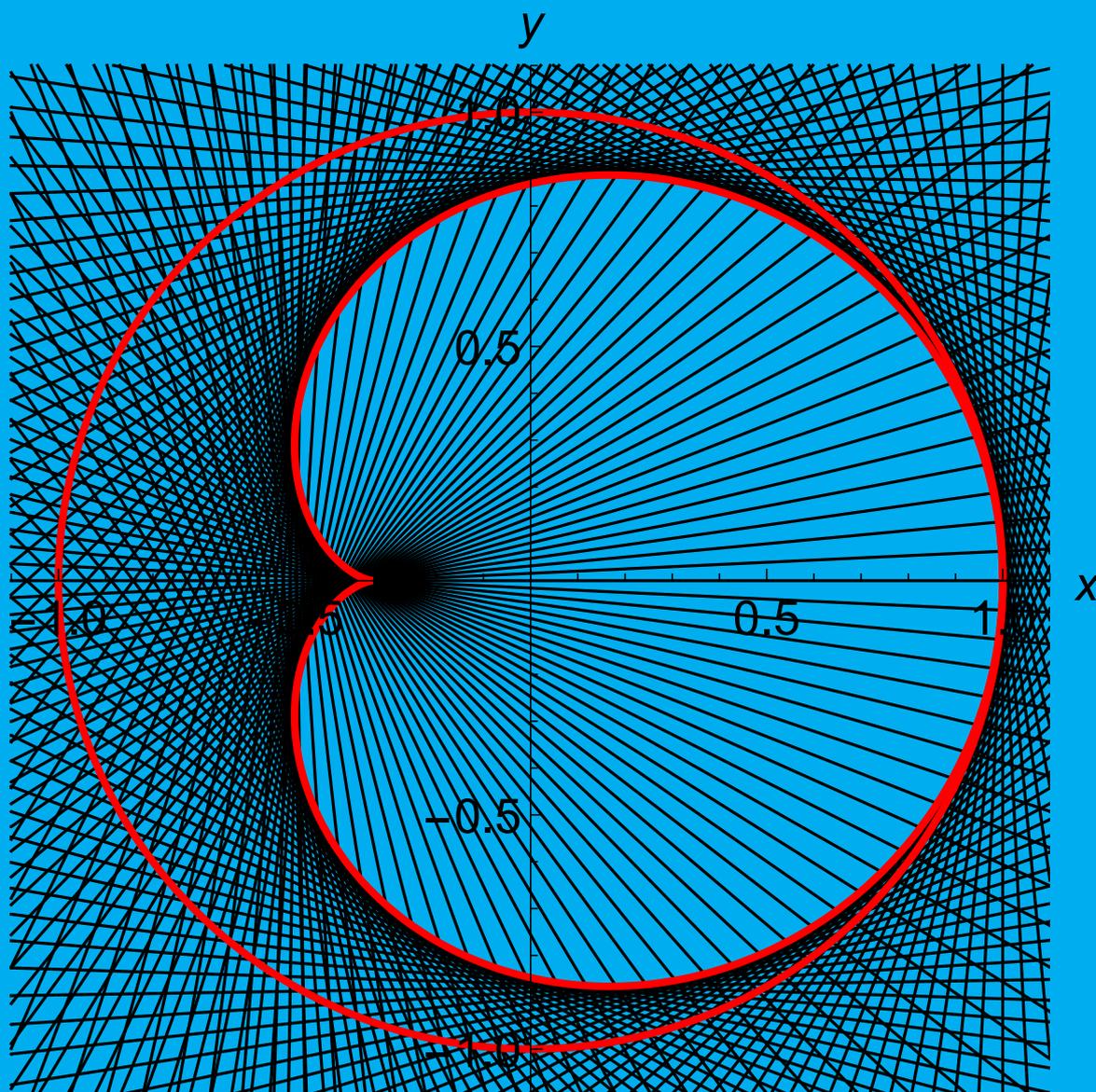


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Mai 2022 — Mai 2022 — Maggio 2022

N° 149



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Kaustik in der Kaffeetasse. Artikel auf Seite 16 in dieser Ausgabe.

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

VSMP/SSPMP/CSMI	2
Patrick Turtschy/Klemens Koch Stellungnahme VSN/VSMP zum Vorschlag des VSG für eine Verteilung der Lektionendotationen	2
Commission Romande de Mathématique	6
Alexandre Junod Le coefficient binomial central et ses applications	6
Cours: Probabilités et statistique	11
Commission Romande de Physique	12
Didier Roulet Congrès UdPPC	12
<i>Cours: Aux frontières de la physique</i>	14
Deutschschweizerische Mathematikkommission	16
Hans Ulrich Keller Die Kaustik in der Kaffeetasse	16
<i>DMK-Lehrmittel: Analysis</i>	21
32. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	22
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht	24
<i>Kurs: Elliptische Kurven und ihre Anwendungen in der Kryptographie</i>	25
Schweizerische Mathematische Gesellschaft Ausschreibung der Matura Awards 2022	26
Deutschschweizerische Physikkommission	28
Martin Lieberherr Überlichtgeschwindigkeit	28

Verein Schweizerischer Naturwissenschaftslehrerinnen und –lehrer (VSN)
Société Suisse des Professeurs de Sciences Naturelles (SSPSN)
Associazione Svizzera degli Insegnanti di Scienze Naturali (ASISN)

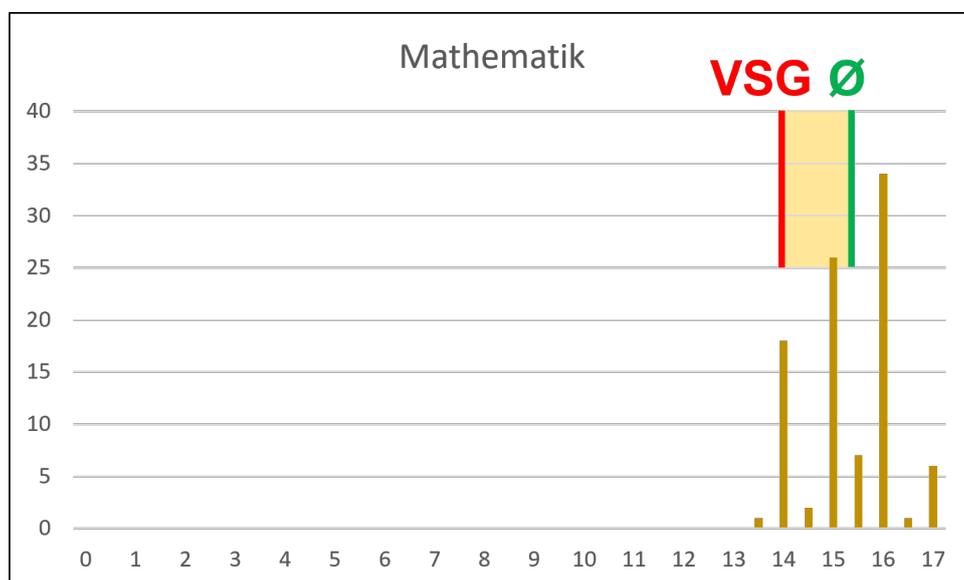
Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP)
Société suisse des professeurs de mathématique et de physique (SSPMP)
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF)

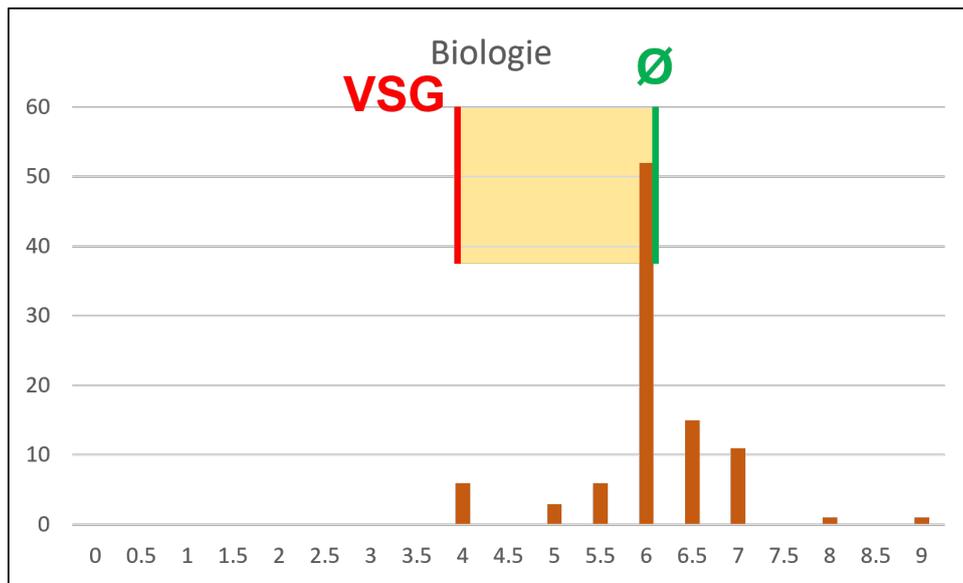
Sehr geehrte Mitglieder der Projektleitung WEGM

Obschon wir nicht als Vernehmlassungsadressaten zur Entwicklung des RLP vorgesehen sind, treibt uns die Sorge um einen sinnvollen Rahmenlehrplan und die Zukunft der naturwissenschaftlichen Fächer dazu, auch unaufgefordert an Sie zu gelangen, da uns der VSG in dieser Sache nicht vertritt.

Die vom VSG entwickelte Zuteilung von Jahreswochenlektionen (JWL) als zeitlichen Rahmen für die Erstellung des RLP wird vom VSMP und vom VSN nicht gestützt. Wir möchten Ihnen im Folgenden unsere Kritik am Vorgehen des VSG äussern:

- Der VSG setzt als Prämisse 1 «das aktuelle Minimum aller Kantone mit einem mindestens vierjährigen Gymnasium» als Lektionenzahl für die Fächer an. Dies bedeutet, dass ein einzelner Kanton, ja sogar eine einzelne Schule mit einer sehr kleinen Dotation für ein Fach zur eidgenössischen «Richtschnur» wird. Aus wissenschaftlicher Sicht wäre eine Festlegung z.B. beim ersten Quartil daher sinnvoller, Ausreisser nach unten könnten so «eliminiert» werden.
- Die Streuung der Lektionenzahlen ist für die verschiedenen Grundlagenfächer sehr unterschiedlich. Grob lässt sich feststellen, dass die «grossen» Fächer (Erstsprache, 2. Landessprache, 3. Sprache und Mathematik) eine kleine Streuung, alle anderen «kleinen» Grundlagenfächer eine grosse Streuung besitzen. Dies sollen die nachfolgenden Grafiken mit der Verteilung der Minimallektionen für Mathematik und Biologie an 95 Gymnasien mit einem 4jährigen Lehrgang exemplarisch zeigen (Anzahl Schulen mit entsprechender Anzahl Jahreswochenlektionen):





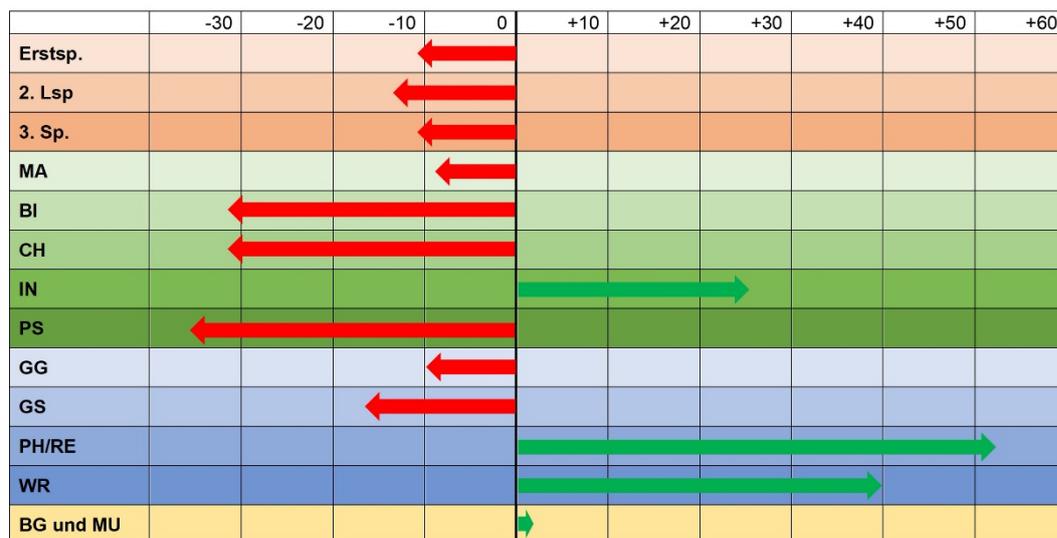
Es ist unschwer ersichtlich, dass die Minimaldotation von 4 Lektionen in Biologie deutlich weiter vom Durchschnitt (6,1) entfernt ist als die 14 Lektionen in Mathematik mit einem Durchschnitt von 15,3 Lektionen.

Der VSG argumentiert, dass nicht mit Durchschnitt gerechnet werden soll, sondern nur die Minima ausschlaggebend sein sollen, da ja heute damit eine anerkannte Matura möglich ist. Unseres Erachtens muss aber auch die Beziehung zwischen den Minima und den Durchschnitt im Auge behalten werden. Zudem weicht der VSG mit seiner RLP-WOST für viele Fächer von diesem Grundsatz ab (siehe unten).

- In den naturwissenschaftlichen Fächern ist ein deutlicher Röstigraben ersichtlich. Die JWL in der Romandie sind klar tiefer als in der Deutschschweiz und dem Tessin. So sind beispielsweise die 6 Schulen, die in Biologie nur 4 JWL aufweisen (siehe Graphik), allesamt aus den Kantonen FR und GE (VD, NE, JU mit nur 3jährigen Lehrgängen sind nicht berücksichtigt). Analoges gilt auch für die Fächer Chemie und Physik.
- Der VSG setzt ungeachtet der Wissensstruktur eines Faches für alle Fächer 4 Lektionen als Minimum fest (Prämisse 2). Damit widerspricht sich der VSG aber selbst, wenn einerseits argumentiert wird, dass mit der Minimaldotation heute eine Matura möglich sei, andererseits aber für verschiedene Fächer (IN, WR, PH/RE, MU, BG) von der Minimaldotation abgewichen wird. Aus unserer Sicht ist eine Festlegung einer Minimaldotation von 4 Lektionen ungeachtet der zu vermittelnden Wissensstruktur eines Lerngebietes unseriös.
- Die Auswirkungen der «Vorgaben» des VSG treffen die naturwissenschaftlichen Fächer überproportional stark. Ein Vergleich der VSG-Dotation mit den heutigen Durchschnitt zeigt die nachfolgende Graphik:

Vergleich VSG-WOST mit Status Quo, GF

Differenz VSG-Dotation zum errechneten Durchschnitt der Kantone (je 1 Gymnasium, ohne VD, NE, JU [3jähriges Gymnasium]) in %

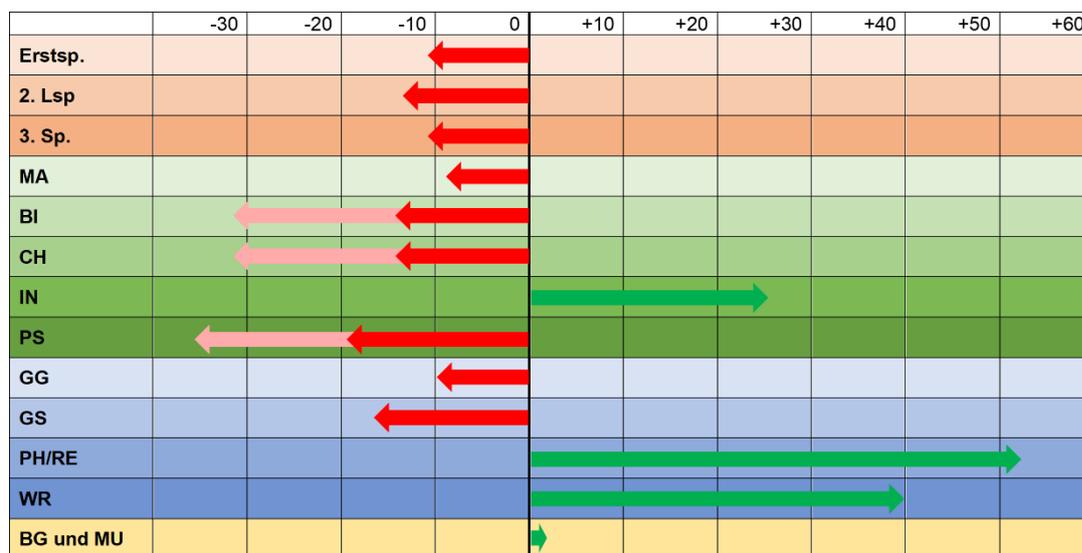


Die 4 «grossen» Grundlagenfächer haben eine relativ kleine Streuung. IN, PH/RE, WR und die Kunstfächer profitieren von der Minimaldotation 4, GG und GS werden durch die Prämien 3 und 4 befördert (+1 wegen «Politischer Bildung» und «Nachhaltiger Entwicklung»). Deutlich am stärksten betroffen sind die drei naturwissenschaftlichen Fächer.

Leider wurde unser Antrag nach einer Erhöhung der JWL für die drei naturwissenschaftlichen Fächern um eine Lektion vom Vorstand und der Präsident*innenkonferenz der VSG am 23. März abgelehnt. Diese Erhöhung hätte folgende Auswirkung:

Vergleich VSG-WOST mit Status Quo (ohne und mit NW-Erhöhung), GF

Differenz VSG-Dotation zum errechneten Durchschnitt der Kantone (je 1 Gymnasium, ohne VD, NE, JU [3jähriges Gymnasium]) in %



Auch mit dieser Erhöhung, wären die Naturwissenschaften (zusammen mit dem Fach Geschichte) am schlechtesten gestellt.

- Bei einer Dotation mit 4 JWL ergibt sich nach den Überlegungen des VSG ein Umfang für den RLP von 3 JWL. Da in den naturwissenschaftlichen Fächern auch ein Praktikum vorgesehen ist, sollen auch die Kompetenzen und Inhalte des Praktikums im RLP ausgewiesen werden.

Für die anderen fachlichen Aspekte bleibt nicht mehr viel Unterrichtszeit übrig. Die Schlüsselrolle der Naturwissenschaften bei der Lösung der drängenden Probleme unserer Gesellschaft (abnehmende Biodiversität, Klimawandel, nachhaltige Energieversorgung etc.) kann bei diesem engen Korsett nur ungenügend abgebildet werden.

Mit Sicherheit ist mit dieser Dotation der naturwissenschaftlichen Fächer das Niveau für die SII des GeRRN (Gemeinsamer europäischer Referenzrahmen für Naturwissenschaften) nicht erreichbar.

Für das Fach Chemie heisst das zum Beispiel, dass der RLP neben den praktisch-experimentellen Aspekten hauptsächlich die Erarbeitung eines tragfähigen Modells für die Beschreibung der Teilchenwelt enthalten wird. Für alle Anwendungen in unserer Lebenswelt bleibt im RLP bei einer Planungszeit von 3 JWL kaum Raum.

- Der VSG argumentiert auch, der kantonale Spielraum müsse erhalten bleiben. Die Prämissen 2 bis 4 «kosten» jedoch insgesamt 15 JWL an kantonalem Spielraum (IN 3, WR 2, PH/RE 4, KU 4, GG 1, GS 1). Die Haltung, dass dann keine Ergänzungen in den Naturwissenschaften möglich sein sollen, finden wir sehr einseitig. Zudem erschwert die Einführung von 4 JWL für die beiden Kunstfächer eine Wahlpflicht/Teilwahlpflicht im Kunstbereich, wie sie derzeit in vielen Kantonen gelebt wird. Dies verringert den Gestaltungsspielraum der Kantone zusätzlich.
- Wir fühlen uns daher durch den VSG in dieser Sache nicht mehr vertreten. Die 4 Prämissen scheinen uns willkürlich und sehr konstruiert zu sein, um eine bestimmte Agenda (Stärkung der Sprachen, GSW, Kunst auf Kosten der MINT-Fächer) umzusetzen.

Gerne stellen wir Ihnen unsere detaillierten Zahlen zur Verfügung. Wir sind auch jederzeit bereit, Fragen zu beantworten und weitere Auskünfte zu unseren Überlegungen und Fächern zu geben.

Mit freundlichen Grüssen

Pour la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique SSPMP, Patrick Turtschy, vice-président

Für den Verein Schweizerischer Naturwissenschaftslehrerinnen und –lehrer (VSN), Klemens Koch, Präsident

Le coefficient binomial central et ses applications

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

Nous présentons quelques encadrements du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$, établissons la formule de Wallis qui permet d'exprimer π par un produit infini, et démontrons le postulat de Bertrand qui garantit l'existence d'un nombre premier compris entre un entier positif donné et son double.

1 Un premier encadrement

Pour un entier $n \geq 1$, le n -ième coefficient binomial central est $\binom{2n}{n}$. On peut déjà remarquer que

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} = 2 \binom{2n-1}{n-1} = 2 \cdot \frac{2n-1}{n} \binom{2n-1}{n-1} \quad (*)$$

L'égalité (*) entre les deux extrémités peut être expliquée par un argument de combinatoire. Si on veut répartir $2n$ individus en deux groupes de même effectif ayant chacun un chef, on peut procéder de deux façons : former les groupes et choisir un chef dans chacun d'eux (il y a $\binom{2n}{n} n^2$ possibilités) ou choisir deux chefs avant de leur attribuer leurs groupes (il y a $2n(2n-1) \binom{2n-2}{n-1}$ possibilités). On en déduit que $\binom{2n}{n} n^2 = 2n(2n-1) \binom{2n-2}{n-1}$, donc $\binom{2n}{n} = \frac{2(2n-1)}{n} \binom{2n-1}{n-1}$.

Minoration. L'inégalité évidente $(2n-1)^2 > 4n(n-1)$ implique $2n-1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n-1}$. Avec la relation (*), on obtient $\binom{2n}{n} > \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \binom{2(n-1)}{n-1}$ et pour $n \geq 2$, on a le produit télescopique

$$\binom{2n}{n} > \frac{4\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}} \cdots \frac{4\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \binom{2}{1} = \frac{4^{n-1}}{\sqrt{n}} \cdot 2 = \frac{4^n}{2\sqrt{n}}.$$

Majoration. L'inégalité évidente $(2n-1)(2n+1) < 4n^2$ montre que $(2n-1)^2 < \frac{4n^2(2n-1)}{(2n+1)}$, donc $2n-1 < \frac{2n\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$. Avec (*), on obtient $\binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1}$ et, si $n > 5$, on a

$$\binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{4\sqrt{2n-3}}{\sqrt{2n-1}} \cdots \frac{4\sqrt{11}}{\sqrt{13}} \cdot \binom{10}{5} = \frac{4^{n-5}}{\sqrt{2n+1}} \cdot 252\sqrt{11} = \frac{252\sqrt{11}}{1024} \frac{4^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Comme $\frac{252\sqrt{11}}{1024} < \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3/2}}$, on a alors $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n+3/2}} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$, ce dernier majorant étant également valable pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Au final, on a démontré l'encadrement $\frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}$ pour $n \geq 2$.

2 L'encadrement classique

Un meilleur encadrement de $\binom{2n}{n}$ peut être établi grâce aux *intégrales de Wallis*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Lorsque $n \geq 2$, une intégration par parties donne

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-1} \cos(x) dx = \underbrace{\left[\sin(x)(\cos x)^{n-1} \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 dx.$$

En remplaçant $(\sin x)^2$ par $1 - (\cos x)^2$ dans la dernière intégrale, on obtient

$$W_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} ((\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n) dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n).$$

En ajoutant $(n-1)W_n$ à chaque extrémité, on trouve $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, donc $W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}$.

On peut réitérer cette relation de récurrence jusqu'à $W_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $W_1 = 1$ selon la parité de l'indice :

$$\left. \begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} (**)$$

En amplifiant chaque produit de fractions par $2 \cdot 4 \cdots (2n) = 2^n n!$, on trouve

$$W_{2n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2) \cdots 1}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n}$$

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1) \cdots 1} = \left(\frac{4^n}{2n+1} \right) / \binom{2n}{n}.$$

Pour tout nombre $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(x) \in]0; 1[$, donc $(\cos x)^{2n+1} < (\cos x)^{2n} < (\cos x)^{2n-1}$ et $W_{2n+1} < W_{2n} < W_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} W_{2n+1}$, ce qui se réécrit

$$\left(\frac{4^n}{2n+1} \right) / \binom{2n}{n} < \frac{\pi}{2 \cdot 4^n} \binom{2n}{n} < \left(\frac{4^n}{2n} \right) / \binom{2n}{n}.$$

En multipliant tout par $\frac{2 \cdot 4^n}{\pi} \binom{2n}{n}$, on obtient $\frac{(4^n)^2}{(n+1/2)\pi} < \binom{2n}{n}^2 < \frac{(4^n)^2}{n\pi}$ et donc

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/2)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Avec le théorème des gendarmes, cet encadrement démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3 La formule de Wallis

Comme $(\cos x)^{2n} > (\cos x)^{2n+1} > (\cos x)^{2n+2}$ lorsque $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $W_{2n} > W_{2n+1} > \overbrace{\frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}}^{W_{2n+2}}$. Par le théorème des gendarmes, il s'ensuit que W_{2n+1}/W_{2n} tend vers 1 lorsque n augmente. Avec les égalités (**), ceci se traduit par la formule de John Wallis (1616 – 1703) :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right).$$

En regroupant les facteurs deux par deux puis en passant à l'inverse, on obtient les formulations équivalentes

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdots \frac{4n^2}{4n^2-1} \right) = \prod_{n \geq 1} \left(\frac{4n^2}{4n^2-1} \right)$$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \left(1 - \frac{1}{6^2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n)^2} \right) \right)$$

4 Un meilleur encadrement

On peut trouver sur un forum internet¹ un meilleur encadrement du coefficient binomial central :

$$\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/3)\pi}} < \binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Preuve. En remarquant que $(2n-1)^2(4n+1) = 16n^3 - 12n^2 + 1 > 16n^3 - 12n^2 = 4n^2(4n-3)$ et que $(2n-1)^2(3n+1) = 12n^3 - 8n^2 - n + 1 < 12n^3 - 8n^2 = 4n^2(3n-2)$ pour $n \geq 2$, on peut écrire

$$\frac{4(4n-3)}{4n+1} < \left(\frac{2n-1}{n} \right)^2 < \frac{4(3n-2)}{3n+1} \quad \text{donc} \quad \frac{2\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}} < \frac{2n-1}{n} < \frac{2\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}.$$

Avec la relation (*) du premier paragraphe, on en déduit que

$$\frac{4\sqrt{4n-3}}{\sqrt{4n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1} < \binom{2n}{n} < \frac{4\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

En divisant chaque inéquation par 4^n et en la multipliant par le dénominateur de la fraction, on obtient

$$\frac{\sqrt{4n-3}}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1} < \frac{\sqrt{4n+1}}{4^n} \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3n+1}}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{\sqrt{3n-2}}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Il s'ensuit que les nombres $a_n = \frac{\sqrt{n+1/4}}{4^n} \binom{2n}{n}$ forment une suite strictement croissante ($a_{n-1} < a_n$)

et que les nombres $b_n = \frac{\sqrt{n+1/3}}{4^n} \binom{2n}{n}$ forment une suite strictement décroissante ($b_n < b_{n-1}$).

Grâce à la limite établie à la fin du deuxième paragraphe, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1/4}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ a clairement la même limite.

1. <https://mathoverflow.net/questions/133732> (*Upper limit on the central binomial coefficient*)

Par croissance de $(a_n)_{n \geq 1}$ et décroissance de $(b_n)_{n \geq 1}$ vers leur limite commune, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{n+1/4}}{4^n} \binom{2n}{n} < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \frac{\sqrt{n+1/3}}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

En passant à l'inverse puis en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \binom{2n}{n}$, on obtient le résultat annoncé. \square

Par exemple, avec $n = 100$, on trouve (avec les logarithmes) $9,0511 \cdot 10^{58} < \binom{200}{100} < 9,0549 \cdot 10^{58}$.

5 Le postulat de Bertrand

Joseph Bertrand (1822 – 1900) a conjecturé que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un nombre premier strictement compris entre n et $2n$. On doit la première preuve à Pafnouti Tchebychev (1821 – 1894) mais nous présentons celle de Paul Erdős (1913 – 1996) qui se base sur un encadrement de $\binom{2n}{n}$.

On considère un nombre entier $n \geq 5$ et on note v_p la multiplicité d'un nombre premier p dans la factorisation de $\binom{2n}{n}$ (par exemple, pour $n = 6$, on a $\binom{12}{6} = 924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$, donc $v_2 = 2$, $v_3 = v_7 = v_{11} = 1$ et $v_p = 0$ pour tout nombre premier p qui ne divise pas 924). On peut alors écrire

$$\binom{2n}{n} = \prod_{p \leq 2n} p^{v_p} = \left(\prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{v_p} \right) \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p^{v_p} \right) \left(\prod_{2n/3 < p \leq n} p^{v_p} \right) \left(\prod_{n < p \leq 2n} p^{v_p} \right).$$

Fixons un nombre premier $p < 2n$ et considérons l'entier $r = \lfloor \log_p(2n) \rfloor$ tel que $p^r \leq 2n < p^{r+1}$. Le produit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ contient $\lfloor n/p \rfloor$ multiples de p , $\lfloor n/p^2 \rfloor$ multiples de p^2 , \dots , $\lfloor n/p^r \rfloor$ multiples de p^r . Il ne contient aucune puissance supérieure de p car $n/p^{r+1} < \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que la plus grande puissance de p qui le divise est $v_p(n!) = \lfloor n/p \rfloor + \lfloor n/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor n/p^r \rfloor$. Le même raisonnement montre que $v_p((2n)!) = \lfloor 2n/p \rfloor + \lfloor 2n/p^2 \rfloor + \dots + \lfloor 2n/p^r \rfloor$. On en déduit alors que

$$v_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \sum_{k=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^r \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Comme $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$ pour tout nombre x (il suffit de traiter les cas $x \in [0; \frac{1}{2}[$ et $x \in [\frac{1}{2}; 1[$ pour s'en convaincre), on a $v_p \leq r$, donc $p^{v_p} \leq p^r \leq 2n$.

En particulier, si $p > \sqrt{2n}$, alors $\log_p(2n) < \log_p(p^2) = 2$ et donc $v_p \leq r = \lfloor \log_p(2n) \rfloor \leq 1$.

On peut encore remarquer que si $\frac{2}{3}n \leq p \leq n$, alors les inégalités $p \leq n \leq \frac{3}{2}p < 2p \leq 2n < 3p$ montrent que la plus grande puissance de p qui divise $(2n)!$ est p^2 alors que $n!$ est divisible par p . On a donc $v_p = 0$ dans ce cas. Avec toutes ces considérations, on obtient

$$\binom{2n}{n} \leq \left(\prod_{p \leq \sqrt{2n}} (2n) \right) \left(\prod_{\sqrt{2n} < p \leq 2n/3} p \right) \left(\prod_{n < p \leq 2n} p \right).$$

Grossièrement, il y a au plus $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor - 1$ nombres premiers inférieurs à $\sqrt{2n}$. Le premier produit est donc inférieur à $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$ et on peut écrire

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot \Pi(1; \lfloor 2n/3 \rfloor) \cdot \Pi(n; 2n)$$

où $\Pi(x; y)$ désigne le produit des nombres premiers p tels que $x < p \leq y$.

Un résultat intermédiaire

Pour pouvoir majorer $\Pi(1; \lfloor 2n/3 \rfloor)$, on montre par induction forte sur $n \geq 2$ que $\Pi(1; n) < 4^{n-1}$. Cette assertion est vérifiée pour $n \in \{2, 3\}$ et on suppose qu'elle le soit pour tout entier $m < n$.

- Si n est pair, alors n n'est pas premier donc $\Pi(1; n) = \Pi(1; n-1) < 4^{n-2} < 4^{n-1}$.
- Si n est impair, disons $n = 2m + 1$, alors $\Pi(1; n) = \Pi(1; m+1)\Pi(m+1; 2m+1)$, ce qui est majoré par $4^m \Pi(m+1; 2m+1)$ par hypothèse d'induction. De plus, $\Pi(m+1; 2m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m+1}$ car il divise $(2m+1)!$ tout en étant premier avec $m!(m+1)!$. On a ainsi

$$\Pi(m+1; 2m+1) < \binom{2m+1}{m+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = \frac{(1+1)^{2m+1}}{2} = 2^{2m} = 4^m,$$

donc $\Pi(1; n) < 4^{2m} = 4^{n-1}$. \square

Retour à la preuve principale

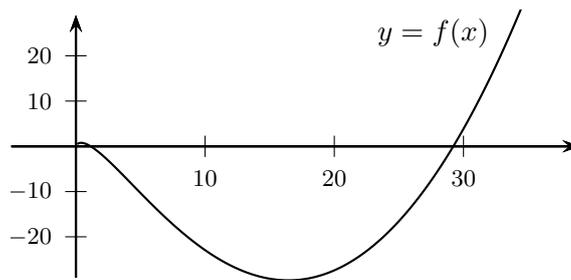
La majoration en bas de la page précédente peut encore être majorée avec le résultat ci-dessus :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} \cdot 4^{2n/3} \cdot \Pi(n; 2n).$$

D'autre part, la minoration du premier paragraphe implique $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^n}{2n}$ pour $n \geq 2$.

On a ainsi $\frac{4^n}{2n} < \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}-1} 4^{2n/3} \Pi(n; 2n)$, et donc $\Pi(n; 2n) > \frac{4^{n-2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}} = \frac{2^{2n/3}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}$.

En posant $x = \sqrt{2n}$, le logarithme du membre de droite est $f(x) = \frac{\ln(2)}{3}x^2 - 2x \ln(x)$.



Si $x \geq 9$, on a $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \left[\frac{\ln(2)}{3}x - 2\ln(x)\right]' = \frac{\ln(2)}{3} - \frac{2}{x} > 0$, donc l'expression $\frac{f(x)}{x}$ définit une fonction strictement croissante. Pour $x \geq 29.22$, on a donc $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(29.22)}{29.22} > 0$ et par conséquent $f(x) > 0$ également. Il s'ensuit que $\Pi(n; 2n) \geq e^{f(\sqrt{2n})} > e^0 = 1$ pour $n \geq 427$.

Il reste à vérifier le postulat de Bertrand pour $n \in \{2, 3, \dots, 426\}$. Pour cela, on considère la liste $\{2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631\}$ dans laquelle chaque terme (sauf le premier) est le plus grand nombre premier inférieur au double du terme précédent. Tout entier $n \in \{2, 3, \dots, 426\}$ est compris entre deux éléments successifs de cette liste, disons entre p_1 et p_2 , et on a $p_1 \leq n < p_2 < 2p_1 \leq 2n$ donc p_2 , qui est un nombre premier, est compris entre n et $2n$. \square

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Entre théories et applications

Dates	du 13 au 16 septembre 2022
Lieu	Hôtel Suisse, Champéry
Renseignements	http://www.vsmmp.ch/crm/accueil/
Inscription	Cours publié par la SSPES sur www.webpalette.ch

Le colloque annuel de la CRM sera consacré cette année à des sujets de probabilités et de statistique. Le programme détaillé sera publié prochainement sur le site de la CRM ; ainsi que quelques informations supplémentaires sur les conférences. Ces dernières porteront sur :

Probabilités, chaînes de Markov et applications, Christian Mazza (Université de Fribourg)

Après une introduction à la théorie des probabilités incluant des applications en sciences et en mathématiques financières, le cours portera sur les propriétés fondamentales des chaînes de Markov et présentera des exemples d'utilisation de tels processus en statistique et en modélisation.

Quelques bases théoriques en statistique, Anthony Davison (EPFL)

Trois conférences permettront de découvrir ou de rappeler des bases théoriques sur les modèles statistiques et le rôle des probabilités, les tests, la fonction de vraisemblance, les estimateurs, les familles exponentielles et l'inférence bayésienne.

Sondages, Yves Tillé (Université de Neuchâtel)

La théorie des sondages est une des spécialisations de la statistique qui a elle-même une position un peu particulière, car elle est utilisée dans presque toutes les disciplines scientifiques. Ce cours se propose de partir des principes de base pour présenter ensuite les plans de sondage et certaines de leurs caractéristiques et terminer sur quelques remarques sur la non-réponse.

Évaluation des risques, Valérie Chavez-Demoulin (Université de Lausanne)

La société humaine se trouve de plus en plus confrontée et vulnérable face à des événements rares mais catastrophiques. Une évaluation quantitative précise des risques liés à de tels événements joue un rôle crucial dans les processus de prise de décision. Pour présenter cette thématique, le cours s'articulera autour de la théorie des valeurs extrêmes, les mesures de risques et l'évaluation de l'incertitude.

Causalité, Linda Mhalla (Université de Lausanne) et **Stat. en pratique**, Alix Zollinger (Nestlé)

La description de ces cours est donnée sur le site de la CRM.

Prix du cours CHF 350.- (y compris une année d'inscription à la SSPMP pour les participant-e-s qui ne sont pas encore membres de l'association)

Délai d'inscription 15 juillet 2022

Chaque participant-e est responsable de sa réservation à l'hôtel.

Prix du logement (avec petit-déjeuner et taxe de séjour)

Hôtel Suisse de CHF 93.- à 113.- /personne /jour

Centre Palladium de CHF 53.- à 93.- /personne /jour

Repas CHF 23.- /personne /repas de midi à l'Hôtel Suisse

Organisateurs : Damien Dobler et Jean-Marie Urfer

Congrès UdPPC Nancy, du 1^{er} au 4 novembre 2021

Didier Roulet, 2 Rue de La Scie, 1207 Genève

rouletd@infomaniak.ch

En France, les cours de physique et de chimie ne sont pas séparés : non seulement ces deux disciplines ne font l'objet que d'une seule note, mais le cours est donné par la même personne. Ces enseignant.e.s sont regroupé.e.s en une association, l'**Union des Professeurs de Physique et Chimie**, laquelle organise, chaque année dans une ville différente, un congrès qui réunit entre 200 et 400 participant.e.s. L'UdPPC a l'élégance d'inviter les sociétés sœurs des pays limitrophes (Belgique, Allemagne, Italie, Suisse), et c'est ainsi que la CRP a été une fois de plus conviée à la manifestation. J'ai donc eu le plaisir de me rendre 4 jours à Nancy en tant que représentant de notre association.

Le premier jour, lundi, était consacré aux visites touristiques (Metz ou Nancy, à choix) ; la guide nous a raconté de très plaisante manière l'histoire de Nancy (très récente - environ 250 ans - par rapport à de nombreuses autres villes) et l'origine de ses célèbres places : de la Carrière, de l'Alliance, et bien entendu Stanislas.



Le congrès scientifique proprement dit démarrait mardi matin dans les locaux de Sciences-Po, avec une conférence plénière à propos du tube DAUM*.

Il s'agit d'une enceinte sous ultravide ($p < 10^{-10}$ mbar) qui mesure plusieurs dizaines de mètres de longueur ; il est équipé d'un chariot que l'on peut déplacer sur toute la longueur du tube, permettant ainsi de faire subir différents traitements aux échantillons déposés sur le chariot sans devoir les sortir de l'enceinte, afin d'élaborer et de caractériser de nouveaux matériaux. L'après-midi se succédaient trois autres conférences plénières. L'une traitait de l'élaboration de molécules chirales aux propriétés optiques particulières, et la suivante de thérapie photodynamique : il s'agit d'envoyer de la lumière (directement ou conduite par des fibres optiques jusqu'à l'intérieur du corps) sur une molécule photoactivable, qui va activer l'oxygène autour d'elle pour produire des espèces réactives de l'oxygène qui vont détruire les cellules tumorales. La journée se concluait par une présentation scientifico-poétique : un scientifique et un "dresseur de bulles", comme il se décrit lui-même, alternaient les interventions et nous ont offert un spectacle magnifique avec des bulles de savon : emboîtées, pleines de fumée, innombrables, géantes, montantes car gonflées à l'hélium, toujours irisées, légères, fugaces.

Ce spectacle concluait parfaitement une première journée déjà bien remplie.



Le mercredi était partagé en cinq plages horaires durant lesquelles se donnaient en parallèle différentes présentations ou ateliers. J'ai pour ma part appris que, hormis le minéral (les roches), toute poudre solide en suspension dans l'air peut exploser (farine, sucre, sciure, plastiques, métaux, ...). Une deuxième conférence à propos des superalliages nous a fait découvrir l'environnement exceptionnellement rude à l'intérieur des tuyères de réacteurs d'avion ; en particulier les extrémités des pales des turbines situées immédiatement en aval de la chambre de combustion doivent pouvoir supporter des contraintes thermiques (plus de 1000°C) et mécaniques spécialement sévères, au point que l'on fabrique actuellement des pales monocristallines ! Ensuite j'ai découvert l'immense variété des matériaux carbonés, et enfin j'ai suivi les procédés de fabrication du verre, les manières de le colorer, ses multiples usages, et son recyclage. Dense journée donc, encore enrichie par la présence de nombreux exposants de matériels scientifiques pour expériences, et d'éditeurs de livres scientifiques.

Pour conclure, la quatrième matinée était consacrée à des visites ; pour ma part j'avais choisi d'aller chez Saint-Gobain à Pont-à-Mousson : ce n'est pas tous les jours que l'on peut assister à une coulée de 40 tonnes de fonte ! Enfin, le congrès se terminait l'après-midi après deux nouvelles conférences plénières. L'une présentait une exposition itinérante intitulée MAGNETIQUE, qui propose au visiteur une déambulation expérimentale qui met en scène la démarche scientifique et qui se propose d'établir le lien avec la recherche fondamentale menée dans un laboratoire de recherches (en particulier la découverte de la magnétorésistance géante). L'autre conférence évoquait les puits de carbone - essentiellement les océans - et l'inquiétante diminution de leur capacité d'absorption liée au réchauffement général du climat.



Un grand merci à l'UdPPC pour sa générosité et son accueil très chaleureux, qui permet d'échanger avec les collègues à propos des méthodes, des difficultés, de l'organisation scolaire, de tout et de rien. Impossibles à chiffrer, mais si bénéfiques, ces moments sont on ne peut plus précieux pour maintenir notre enthousiasme ; puissent-ils perdurer encore longtemps !

Didier Roulet

* Pour des détails à propos du tube DAUM, voici deux références extrêmement riches, qu'il vaut de toute manière la peine de visiter :

Taper

<https://culturesciences.chimie.ens.fr/>

puis cliquer sur **Thématiques**, et dans le menu déroulant

Chimie physique, chimie quantique – Modélisation

On peut tout aussi bien taper

<https://culturesciences.physique.ens-lyon.fr/>

puis cliquer sur **Domaines de la physique**, et dans le menu déroulant cliquer sur

Physique sub-atomique et microscopique.

Cours de formation continue 2022 : Aux frontières de la physique

Didier Roulet rouletd@infomaniak.ch

Informations générales

- **Objectifs :** 1°. Dresser un état de la situation de notre discipline dans différents domaines
2°. Faire le lien et actualiser nos cours à l'avantage des élèves
- **Dates :** (27)-28-29-30 septembre 2022
- **Lieu :** Champéry (VS)
- **Inscriptions :** Dès le mois de mai sur webpalette.ch.
Attention, les inscriptions auront lieu directement via la société faîtière SSPES
Les membres de la SSPMP seront prioritaires.

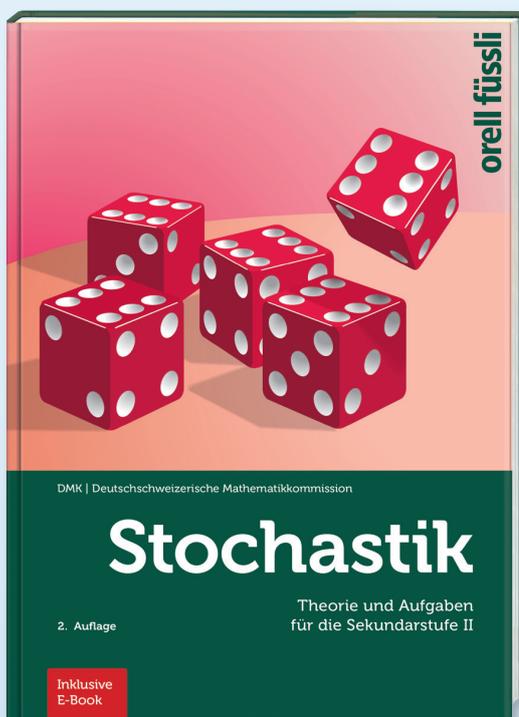
Description du cours

Depuis 2019, la CRP ne vous a proposé – et de surcroît sur écran - qu'une conférence de Roland Lehoucq. Après trois ans, il nous a semblé pertinent de solliciter quelques spécialistes de haut niveau pour dresser un état des lieux concernant la recherche en physique et ce, dans plusieurs directions. A ce jour, le programme n'est pas définitif, mais voici ce qui est déjà confirmé :

- Jean-Marc Lévy-Leblond inaugurera le cours par une réflexion globale sur l'avenir de la physique.
- Dans "l'infiniment petit", Nathalie Besson fera le point dans le domaine des particules et Nicolas Gisin nous parlera de l'état des lieux et du futur de l'intrication.
- Dans "l'infiniment grand", André Maeder traitera de matière et d'énergie noires et de la vie dans l'univers, tandis que Roland Lehoucq évoquera la notion d'horizon en cosmologie.

Vous avez vu que la date du mardi 27 est entre parenthèses : nous espérons tout comme en 2019 pouvoir vous proposer une visite - et si possible une conférence - le mardi après-midi, mais rien n'est encore confirmé. Toutefois, pour ne pas prêter à celles et ceux qui ne pourraient pas y participer, il n'y aura pour la matinée du mercredi 28 qu'une conférence, à dix heures.

Für einen sachgerechten Umgang mit Statistiken und Wahrscheinlichkeiten



DMK (Hrsg.)
Eva Frenzel, Fabian Glötzner, Hansruedi Künsch, Nora Mylonas, Hansjürg Stocker

Stochastik

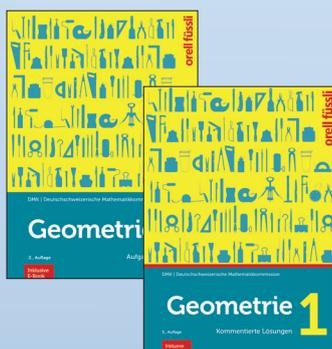
Theorie und Aufgaben für die Sekundarstufe II

Inklusive E-Book

2., überarbeitete Auflage 2022
184 Seiten, broschiert mit Klappe
18,4 × 26,5 cm
Fr. 37.– | 978-3-280-04039-3
Erscheinungstermin: Juni 2022

Das Lehrmittel richtet sich an Lernende und Lehrpersonen der gymnasialen Oberstufe. Es deckt die vom «Kanon Mathematik» geforderten Themen vollständig ab und bietet die Grundlagen für ein Gebiet der Mathematik, das bei gesellschaftlichen Fragestellungen, sei es in den Medien oder in alltäglichen Begebenheiten, immer mehr an Bedeutung gewonnen hat. Das Lehrwerk «Stochastik» fördert ein besseres Verständnis für statistische Zahlen und Wahrscheinlichkeiten. Der Lösungsband enthält ausführliche und kommentierte Lösungswege sowie didaktische Hinweise und weiterführende Literatur. Für die 2., überarbeitete Auflage wurden im Kapitel «Bedingte Wahrscheinlichkeit» der Aufbau sowie die Erklärungen angepasst, um die wesentlichen Aspekte des Themas klarer erkennbar und damit für die Lernenden leichter fassbar zu machen.

Weitere DMK-Bücher in der Übersicht



DMK (Hrsg.),
H. Klemenz, M. Graf

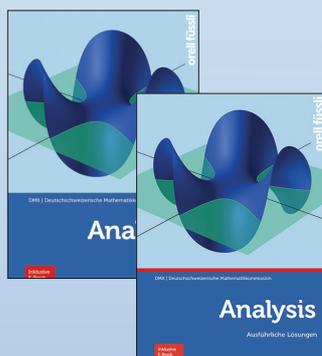
Geometrie 1

Aufgaben
Inklusive E-Book
2., durchgesehene Auflage
2020
128 Seiten, broschiert
18,3 × 26,5 cm
Fr. 32.–
978-3-280-04135-2
Lieferbar

DMK (Hrsg.),
H. Klemenz, M. Graf

Geometrie 1

Kommentierte Lösungen
Inklusive E-Book
3., durchgesehene Auflage
2022
192 Seiten, broschiert
21 × 29,7 cm
Fr. 87.–
978-3-280-04038-6
ET: Juni 2022



DMK (Hrsg.), B. Dzung Wong,
M. Schmid, R. Sourlier-Künzle,
H. Stocker, R. Weibel

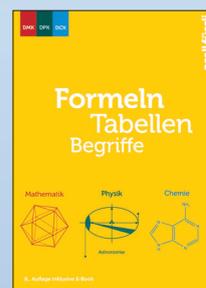
Analysis

Aufgaben
Inklusive E-Book
1. Auflage 2022
288 Seiten, broschiert
18,4 × 26,5 cm
Fr. 39.–
978-3-280-04200-7
ET: Juni 2022

DMK (Hrsg.), B. Dzung Wong,
M. Schmid, R. Sourlier-Künzle,
H. Stocker, R. Weibel

Analysis

Ausführliche Lösungen
Inklusive E-Book
1. Auflage 2022
256 Seiten, broschiert
18,4 × 26,5 cm
Fr. 56.–
978-3-280-04201-4
ET: Juni 2022



DMK (Hrsg.), W. Durandi, B. Dzung Wong,
M. Kriener, H. Künsch, A. Vogelsanger,
J. Waldvogel, S. Byland, K. Koch, A. Bartlome,
M. Bleichenbacher, H. Roth

Formeln, Tabellen, Begriffe

Mathematik – Physik – Chemie
Inklusive E-Book
8., aktualisierte Auflage 2022
264 Seiten, broschiert, 17 × 23 cm
Fr. 29.–
978-3-280-04029-4
ET: Juni 2022

Bestellen Sie über ofv.ch

orell füssli
verlag

Die Kaustik in der Kaffeetasse

Hans Ulrich Keller, ehem. MNG Zürich; hukkeller@bluewin.ch

Als Kaustik oder Brennlinie bezeichnet man in der Optik einen Bereich, in welchem Lichtstrahlen Tangenten an einen Bogen sind. Eine solche Kaustik ist beispielsweise auf dem Boden einer zylindrischen Kaffeetasse mit reflektierender Innenseite zu sehen, die von parallelem Licht schräg von oben rechts angestrahlt wird.



Fig. 1: Kaustik in der Kaffeetasse.

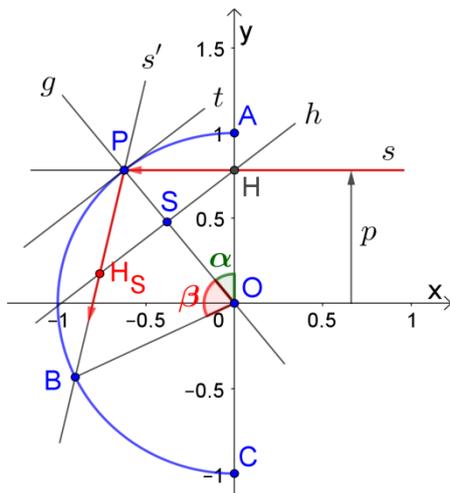


Fig. 2: Bezeichnungen beim Halbkreis.

Der Reflexionspunkt P hat die Koordinaten $(-\sqrt{1-p^2}, p)$. Die Tangente t im Punkt P hat die Steigung $\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$, und die dazu senkrechte Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} \cdot x$. Die Parallele h zur Tangenten t durch den Punkt $H(0, p)$ hat die Gleichung $y = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} \cdot x + p$. Sie schneidet die Gerade g im Punkt $S(-p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_s(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_s(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_s(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_s(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_s(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$$y(p, x) := \frac{2p \cdot \sqrt{1-p^2}}{2p^2-1} \cdot x + \frac{p}{2p^2-1} \quad \text{Gl. 1}$$

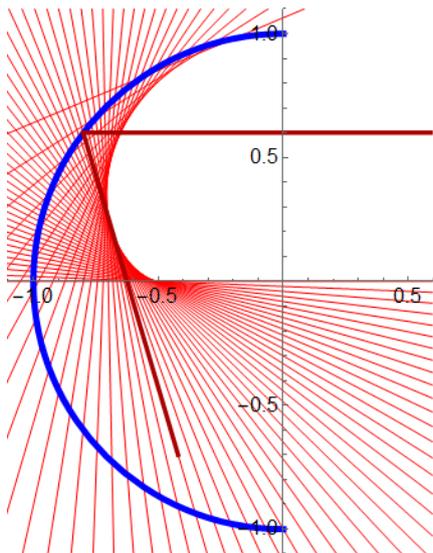


Fig. 3: Simulation der Kaustik in der Kaffeetasse.

In Fig. 3 wurden alle reflektierten Strahlen s' für $p \in \{0.02, 0.04, 0.06, \dots, 0.98\}$ eingezeichnet, zusammen mit dem speziellen einfallenden Strahl für $p = 0.6$ und seinem gespiegelten Strahl. Die Strahlen für Werte von p zwischen -1 und 0 wurden hier der Klarheit halber weggelassen.

Die sich so ergebende Kaustik-Kurve, aber auch die oben erwähnte Verdoppelung des Winkels POA zum Winkel BOP für jeden Wert von p , erinnert an die bekannte und z. B. vom 'Mathologer' sehr schön beschriebene graphische Multiplikationstabelle ⁽¹⁾, die zu einer Kardioide als Kaustikkurve führt.

Entspricht die Kaustik in der Kaffeetasse ebenfalls einer Kardioide?

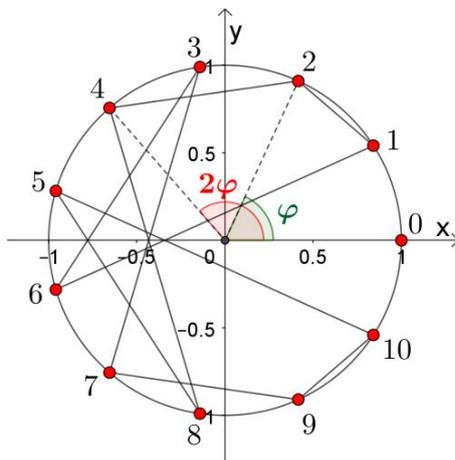


Fig. 4: Erklärung zum Vorgehen.

Für eine graphischen Multiplikationstabelle setzen wir m Punkte in regelmässigen Abständen auf den Einheitskreis, z. B. $m = 11$, und nummerieren diese Punkte von 0 bis 10 durch, beginnend mit dem Punkt $(1,0)$ auf der x -Achse. Dann wird von jedem Punkt mit der jeweiligen Nummer n aus die Verbindungsstrecke gezeichnet zum Punkt mit der zugehörigen Nummer $2n$, was eben gerade einer Verdoppelung des Winkels φ entspricht: S. Fig. 4. Vom Punkt mit der Nummer 0 geht darum keine Strecke aus; vom Punkt 1 geht eine Strecke zum Punkt 2 , vom Punkt 2 zum Punkt 4 , und so weiter. Vom Punkt 6 müsste eine Strecke zum Punkt mit der Nummer 12 gezeichnet werden.

Wären wir in der Nummerierung weitergefahren, hätte der Punkt 0 auch die Nummern $11, 22, 33, \dots$ erhalten, und der Punkt 1 auch die Nummern $12, 23, 34, \dots$. Allgemein führt darum eine Strecke vom Punkt mit der Nummer n zum Punkt mit der Nummer $((2n) \text{ modulo } m)$, und darum z. B. vom Punkt 6 zum Punkt 1 und vom Punkt 7 zum Punkt 3 .

Wählen wir $m = 200$, so zeichnet sich eine Kurve als Einhüllende ab, die wie die Kaustik in der Kaffeetasse aussieht: S. Fig. 5.

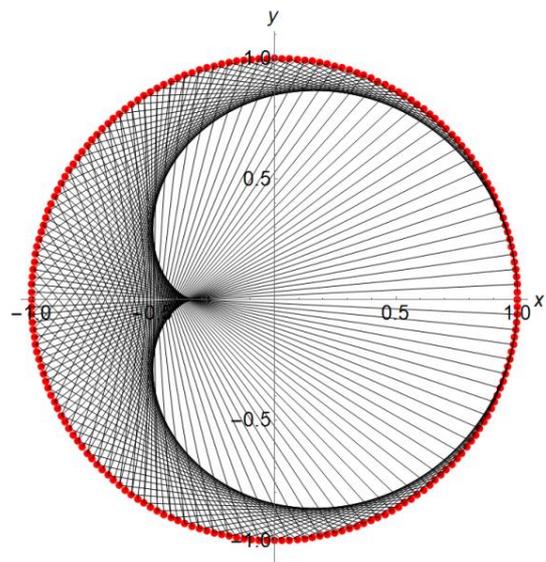


Fig. 5: Bild bei der Wahl $m = 200$.

Hätten wir hingegen Strecken von jedem Punkt n zum Punkt $3n$ statt zum Punkt $2n$ eingezeichnet, hätte sich als Einhüllende eine Nephroide oder Nierenkurve ergeben ⁽¹⁾.

Allgemein ergibt sich mit Strecken von jedem Punkt n zum Punkt $k \cdot n$ eine einhüllende Kurve mit $k-1$ 'Lappen' (¹).

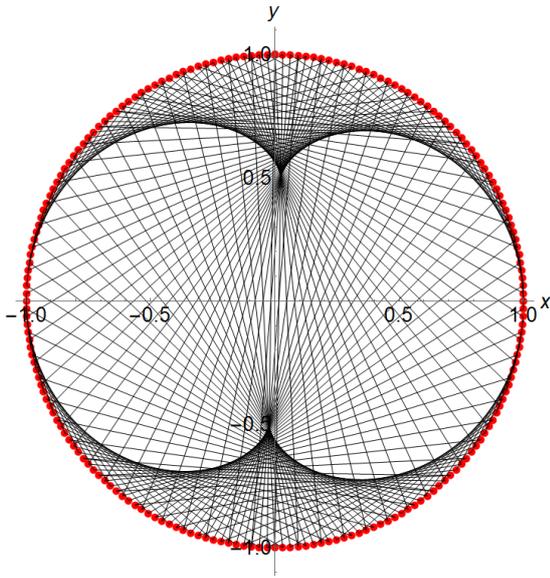


Fig. 6: Nephroide für $k = 3$.

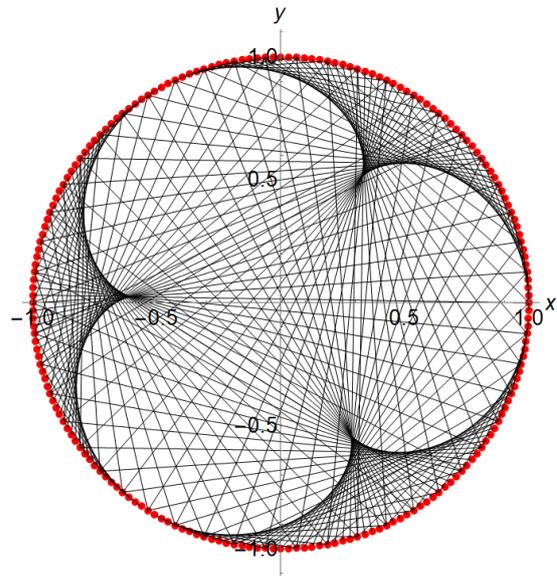


Fig. 7: Einhüllende für $k = 4$ mit 3 'Lappen'.

Die sich oben in Fig. 5 für $k = 2$ abzeichnende Einhüllende ist tatsächlich eine Kardioide, wie das im Folgenden nun hier gezeigt wird:

Die Gleichung einer Kardioide in Parameterform ist allgemein gegeben durch

$$\begin{cases} x(\varphi) = 2a \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) = 2a \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{Gl. 2 (²)}$$

Der frei wählbare Streckfaktor a bestimmt dabei die Grösse der Kardioide.

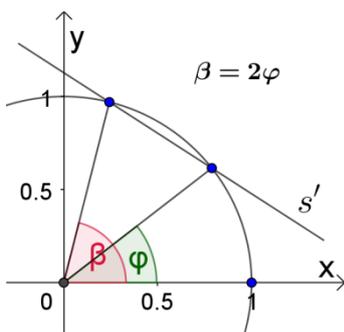


Fig. 8: Zur Geradenschar s' .

Für den Kreis mit Radius 1 hat die Gerade s' (s. Fig. 8) der Geradenschar die Steigung

$$m = \frac{\sin(2\varphi) - \sin(\varphi)}{\cos(2\varphi) - \cos(\varphi)}$$

Dies ergibt für jeden Winkel φ die Gleichung der Geraden s' :

$$y(\varphi, x) = m \cdot x + \sin(\varphi) - m \cdot \cos(\varphi) \quad \text{Gl. 3}$$

Gemäss dem bekannten Vorgehen zum Auffinden der Gleichung einer Einhüllenden wird die Ableitung von $y(\varphi, x)$ nach dem Parameter φ gleich Null gesetzt und diese neue Gleichung nach x aufgelöst. Das ergibt denjenigen x -Wert, der zu diesem Winkel den gewünschten extremalen – hier minimalen – Wert aufweist.

Der zugehörige y -Wert der Einhüllenden ergibt sich, wenn in der allgemeinen Geradengleichung $y(\varphi, x) = m \cdot x + \sin(\varphi) - m \cdot \cos(\varphi)$ (Gl. 3) dieser so gefundene x -Wert eingesetzt wird.

Sowohl dieser x -Wert als auch der zugehörige y -Wert sind beides unübersichtliche Terme in $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$. Mit dem CAS *Mathematica* lassen sich beide diese Terme umformen, was zu der folgenden Parameterdarstellung dieser Kaustikkurve führt:

$$\boxed{\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{2}{3} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{3} \\ y(\varphi) &= \frac{2}{3} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \leq \varphi &\leq 2\pi \end{aligned}} \quad \text{Gl. 4}$$

Die Parameterdarstellung gem. Gl. 4 lässt sich aus der weiter oben wiedergegebenen allgemeinen Parameterdarstellung einer Kardioide gem. Gl. 2 herleiten, wenn $a = \frac{2}{3}$ gewählt wird und diese Kurve anschliessend um $\frac{1}{3}$ in negativer x -Richtung verschoben wird. Die sich in Fig. 5 für $k = 2$ abzeichnende Einhüllende bei der graphischen Multiplikationstabelle ist also tatsächlich eine Kardioide.

Mit den oben in Gl. 4 gegebenen Werten für $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ kann auch leicht der Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2) d\varphi = \frac{5\pi}{9}$$

dieser Kardioide berechnet werden, sowie deren Umfang, der erstaunlicherweise rational ist:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi = \frac{16}{3}.$$

Mit entsprechenden Umformungen der Gl. 2 kann weiter auch die kartesische Form der allgemeinen Kardioidengleichung gefunden werden: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$ (2).

Nun aber zurück zur Kaustik in der Kaffeetasse:

Um die Einhüllende aller Geraden gem. Gl. 1 zu finden, wird – mit analogem Vorgehen wie oben bei der Kaustik der graphischen Multiplikationstabelle gem. Fig. 5 und Gl. 3 – die Ableitung von $y(p, x)$ gem. Gl. 1 nach dem Parameter p gleich Null gesetzt und diese Gleichung nach x aufgelöst. Dies ergibt $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1-p^2} \cdot (1+2p^2)$. Das ist derjenige x -Wert, für den die Gerade, die dem Parameter p entspricht, extremalen Wert hat. Der zugehörige y -Wert ist gleich $y(p, x)$, was vereinfacht gerade gleich p^3 ist. Die Kaustik in der Kaffeetasse hat damit die parametrische Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} x(p) &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-p^2} \cdot (1+2p^2) \\ y(p) &= p^3 \\ -1 \leq p &\leq 1 \end{aligned}} \quad \text{Gl. 5}$$

Die Kurve gem. Gl. 5 ist sinnvollerweise nur gerade für Werte von p mit $-1 \leq p \leq 1$ definiert. In Fig. 9 wurde diese Kurve in grün zu der (komplettierten) Graphik der Fig. 3 hinzu gezeichnet: Sie passt mit dieser wie erwartet bestens zusammen.

Behauptung: Die Kurve gem. Gl. 5 ist eine (halbe) Epizykloide, die entsteht, wenn ein Kreis mit Radius $a = 0.25$ aussen auf einem Kreis mit Radius $b = 0.5$ abrollt. Wegen $b:a = 2$ ist sie ausserdem auch eine (halbe) Nephroide. Diese entspricht der folgenden Gleichung:

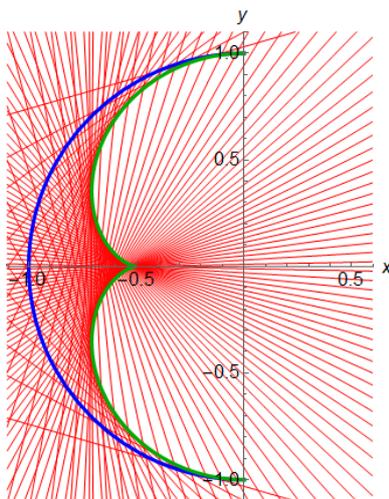


Fig. 9: Kaustik-Kurve gem. Gl. 5.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= -(a+b) \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \cos\left(\frac{(a+b) \cdot \varphi}{a}\right) \\ y(\varphi) &= (a+b) \cdot \sin(\varphi) - a \cdot \sin\left(\frac{(a+b) \cdot \varphi}{a}\right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 6 } (^2)$$

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin(3\varphi)$ und $\cos(3\varphi)$ kann Gl. 6 zu Gl. 7 vereinfacht werden:

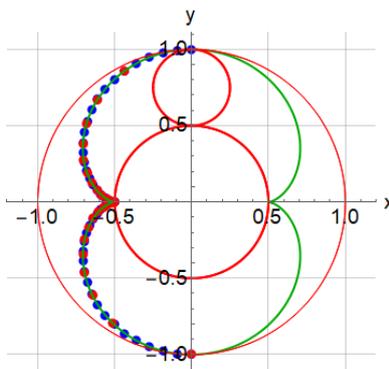


Fig. 10: Vergleich der Kurven gem. Gl. 5 und Gl. 7.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= -\frac{3}{2} \cdot \cos(\varphi) + \cos^3(\varphi) \\ y(\varphi) &= \sin^3(\varphi) \end{aligned} \quad \text{Gl. 7}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

In Fig. 10 ist die Abrollsituation bei dieser Epizykloide wiedergegeben. Punkte gem. Gl. 5 sind in rot, Punkte gem. Gl. 7 in blau wiedergegeben. Graphisch ist die Übereinstimmung überzeugend: Diese beiden Kurven sind identisch!

Beweis: Mit der Substitution $p = \sin(\varphi)$ kann Gl. 5 sofort in Gl. 7 übergeführt werden.

Die Länge dieser Kaustik ist übrigens exakt gleich 3, und die von ihr und der y -Achse eingeschlossene Fläche misst $\frac{3\pi}{8}$, was drei Vierteln der halben Einheitskreisfläche entspricht.

Zusammenfassung:

Die Kaustik in der Kaffeetasse mit Radius 1 ist kongruent zu einer Hälfte derjenigen Epizykloide, die sich ergibt, wenn ein Kreis mit Radius $a = \frac{1}{4}$ aussen auf einem Kreis mit Radius $b = \frac{1}{2}$ abrollt.

Literatur:

- (¹): Burkard Polster, Blog 'Mathologer': Times Tables, Mandelbrot and the Heart of Mathematics. <https://youtu.be/qhbuKbxJsk8>.
- (²): Bronstein Semendjajew (1982). Taschenbuch der Mathematik, p. 141 ff.

Analysis

Das von der DMK herausgegebene neue Lehrmittel „Analysis“ wird im Juni beim OFV erscheinen!

Das neue Lehrwerk „Analysis“ der DMK kann als direkte Fortsetzung der „Algebra 9/10“ eingesetzt werden. Es beinhaltet in erster Linie den Unterrichtsstoff des Grundlagenfachs Mathematik am Gymnasium und richtet sich nach dem „Kanon Mathematik“.

Jedes Kapitel beginnt mit Einstiegsfragen oder -aufgaben, die dem Erkunden des Kapitelthemas dienen können. Danach folgen Übungsaufgaben, gefolgt von Verständnisfragen bis hin zu den Anwendungen. Das Ganze wird ergänzt durch Theorieblöcke, die bewusst kurz gefasst sind, um den Lehrkräften die Methodenwahl offen zu lassen.

Abgesehen von Kapitel X am Ende des Buches schliesst jedes Kapitel mit den Unterkapiteln „Vermischte Aufgaben“ und „Kontrollaufgaben“, wobei letzteres nicht weiteres Übungsmaterial bereitstellt, sondern den Schülerinnen und Schülern die Gelegenheit bietet, ihre Grundfertigkeiten selbstständig zu überprüfen. In den Unterkapiteln „Weitere Themen“ werden Inhalte und Fragen aufgegriffen, die über das Grundlagenfach hinausgehen und punktuell mit interessierten Schülerinnen und Schülern sowie im Schwerpunktfach oder Ergänzungsfach behandelt werden können.

Im Aufgabenband sind die Ergebnisse aller Aufgaben am Schluss des Buches aufgeführt. In einem separaten Lösungsband sind zudem sämtliche Lösungen mit ausgeführtem Lösungsweg erhältlich.

Autoren:

Baoswan Dzung Wong, Marco Schmid,
Regula Sourlier-Künzle, Hansjürg Stocker,
Reto Weibel



Analysis

- Aufgaben

inklusive E-Book

1. Auflage 2022

ca. 288 Seiten, 18,4 × 26,5 cm, broschiert

ISBN 978-3-280-04200-7

Fr. 39.–

- Ausführliche Lösungen

inklusive E-Book

1. Auflage 2022

ca. 256 Seiten, 18,4 × 26,5 cm, broschiert

ISBN 978-3-280-04201-4

Fr. 56.–

- Kombipaket Analysis –
Aufgaben + Lösungen

ISBN 978-3-280-04221-2

Fr. 81.–

Orell Füssli Verlag

Bestellungen: www.ofv.ch/lernmedien

32. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die Schweizerische Mathematische Gesellschaft SMG, die Deutschschweizerische Mathematikkommission DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

- Ort:** Scuola Cantonale di Commercio SCC Bellinzona
Datum: Mittwoch, 14. September 2022
Organisation: Meike Akveld (ETH), Arno Gropengiesser, Irene Gut, Lorenz Halbeisen (ETH), Norbert Hungerbühler (ETH), Ferdinando Lehmann, Andrea Riva, Marina Suà.
Kurskosten: Gegen Entrichtung der Tagungsgebühr von 30 CHF erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer einen Bon für das Mittagessen.
Anmeldung: bis 1. September 2021

Programm

Check-in: Kaffee, Orangensaft und Gipfeli; Einziehen der Tagungsgebühr	10.00 – 10.45 Uhr
Begrüssung und Einführung	10.45 – 11.00 Uhr
Vortrag: Antonietta Mira (USI) und Armando Massarenti (Il Sole 24 Ore) <i>The pandemic of data: here is the vaccine (Vortragssprache Englisch)</i> La pandemia dei dati: ecco il vaccino	11.00 – 12.00 Uhr
Aufsuchen der Workshopzimmer	12.00 – 12.15 Uhr
Workshops (siehe unten)	12.15 – 13.15 Uhr
Mittagessen: Mensa	13.15 – 14.30 Uhr
Preisverleihung Matura Award SMG <i>Vorträge der Preisträgerinnen und Preisträger über ihre prämierte Maturaarbeiten</i>	14.30 – 15.15 Uhr
Kaffeepause	15.15 – 15.30 Uhr
Workshops (siehe unten)	15.30 – 16.30 Uhr
Ende der Veranstaltung	16.30 Uhr

Die Zeitangaben und das Programm sind provisorisch.

Workshops

- Workshop A (deutsch): *Präsentation des neuen Analysis-Lehrmittels der DMK*, Barbara Fankhauser (Gymnasium Bäumlhof, Basel) und Marco Schmid (KS Zug)
- Workshop B (italiano): *I numeri primi e i numeri perfetti*, Piero Antognini (CMSI)
- Workshop C (italiano/deutsch): *Generosità senza pericolo: algebra giocosa / Gefahrlose Grosszügigkeit: spielerische Algebra*, Emanuele Delucchi (SUPSI)
- Workshop D (italiano/deutsch): *Percolazione / Perkolation*, Vanessa Piccolo (ENS de Lyon)
- Workshop E (deutsch/englisch): *Eigengesichter / Eigenfaces*, Oliver Rietmann (ETH Zürich)
- Workshop F (italiano/deutsch): *Opzione complementare e/o lavoro di maturità a tema matematica attuariale / Wahlfach und/oder Matura-Arbeit mit aktuareller Mathematik als Thema*, Giorgio Barozzi (PCCmetrics)
- Workshop H (deutsch/italiano): *Datum und Wochentag - ein Stück Kalendermathematik / Le date e i giorni della settimana - matematica del calendario*, Claudia Albertini (PH Zürich & Universität Zürich) und Martin Huber (ZHAW & Universität Zürich)

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: www.math.ch/TMU2022



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2022

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hauptgebäude der ETH Zürich statt.

Donnerstag, 27. Oktober 2022

Von Transmissionsketten, Reproduktionszahl und Dunkelziffer: Mathematische Modellierung von Epidemien mithilfe Maximum-Likelihood Methoden und Differentialgleichungen.

Katharina Kusejko, Universität Zürich

Donnerstag, 10. November 2022

Mathe und Magie. Mathematik findet man überall – auch in der Zauberei.

Annegret Weng, Hochschule für Technik Stuttgart

Donnerstag, 24. November 2022

Thales und Co – Vom Beweis zum Satz.

Alexander Unger, Humboldt-Universität Berlin

Donnerstag, 8. Dezember 2022

Data Science im Fach Informatik oder wie Informatikunterricht Mathematik stärken kann. Vorstellung des zweiten Bandes des Lehrmittels Informatik für Maturitätsschulen.

Juraj Hromkovic, ETH Zürich

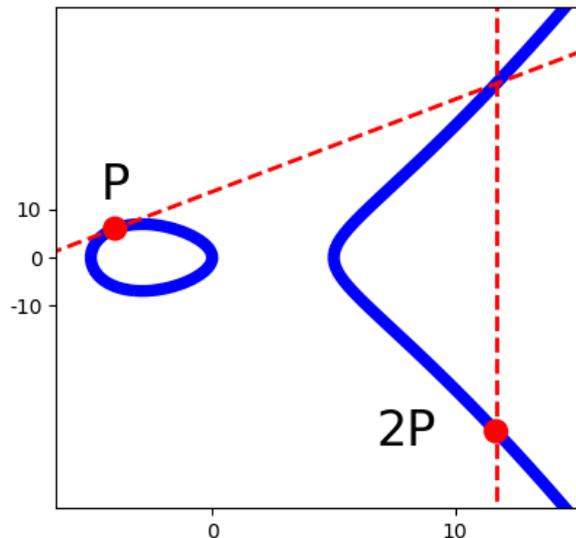
Regula Lacher, ETH Zürich

Mathilde Ruefenach, ETH Zürich

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

Elliptische Kurven und ihre Anwendung in der Kryptographie



In einem ersten Teil werden die geometrischen Eigenschaften von elliptischen Kurven behandelt und mit dem CAS «sage» dargestellt. In einem zweiten Teil wird die Theorie elliptischer Kurven aus algebraischer Sicht beleuchtet und Verbindungen zu einem klassischen Problem der Zahlentheorie hergestellt. Schliesslich werden, ebenfalls mit «sage», zwei Anwendungen von elliptischen Kurven in der Kryptographie gezeigt: der «Diffie-Hellman Schlüsselaustausch» und «Lenstras Faktorisierungsverfahren mit elliptischen Kurven».

Referent:	Prof. Dr. Philipp Habegger, Universität Basel
Zielpublikum:	Lehrkräfte der Sekundarstufe II (Mathematik und Informatik)
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Andrea Peter (DMK)
Datum und Zeit:	Donnerstag, 8. September 2022, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr Ab 9:00 Begrüssungskaffee
Kursort:	Universität Basel
Kurskosten:	Fr. 200.- (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) Fr. 150.- für VSMP-Mitglieder und Studierende
Anmeldung:	https://math.ch/DMK2022c
Anmeldeschluss:	1. September 2022





Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Société Mathématique Suisse

Ausschreibung der Matura Awards 2022 der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Seit 2010 verleiht die Schweizerische Mathematische Gesellschaft (SMG) alle zwei Jahre einen oder mehrere Preise an Gymnasiastinnen oder Gymnasiasten, die eine hervorragende Maturaarbeit oder ein Projekt im Rahmen des Wettbewerbs "Schweizer Jugend forscht" verwirklicht haben.

Die SMG lädt hiermit interessierte Jugendliche ein, ihre Bewerbungen für die Matura Awards 2022 einzureichen. Zugelassen sind Arbeiten, die im vergangenen oder laufenden Schuljahr abgeschlossen wurden und die in der Mathematik angesiedelt oder interdisziplinär mit einem substantiellen Anteil an Mathematik angelegt sind.

Die Preisverleihung wird im Rahmen des 31. Schweizerischen Tags über Mathematik und Unterricht am 14. September 2022 an der Scuola Cantonale di Commercio SCC in Bellinzona stattfinden. Schülerinnen und Schüler, die sich bewerben möchten, senden ihre Arbeit als PDF-Datei (oder in zwei gedruckten Exemplaren) zusammen mit ihrer Adresse und einem kurzen CV bis am 30. Juni 2022 an

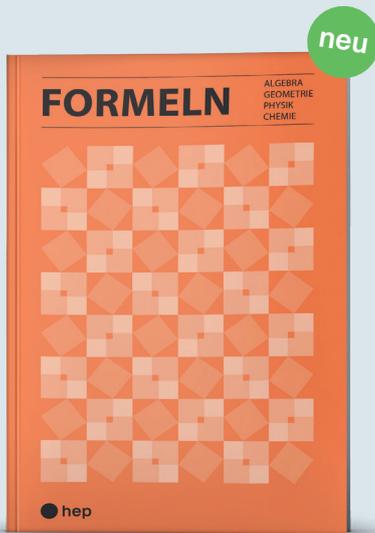
Joachim Rosenthal
rosenthal@math.uzh.ch
Institut für Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190
CH-8057 Zürich

Die Jury wird vom Vorstand der SMG zusammengestellt und besteht aus Hochschulangehörigen. Sie wird vom Vizepräsidenten der SMG geleitet. Die Gymnasiallehrkräfte im Fach Mathematik sind höflich gebeten, diese Information an geeignete Kandidatinnen und Kandidaten weiterzuleiten.

Zurich, 18. Januar 2022

Joachim Rosenthal
Vizepräsident der SMG

Die Natur berechnen, um die Welt zu verstehen.



hep Verlag

Formeln

Algebra, Geometrie, Physik, Chemie

1. Auflage 2022 | 72 Seiten | 16 × 24 cm | Broschur,
ISBN 978-3-0355-1392-9 | CHF 25.-



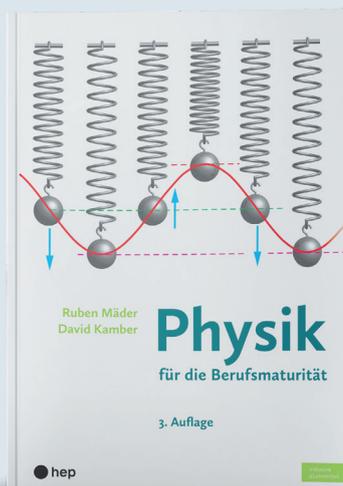
Juraj Hromkovic, Elizabeta Cavar, Walter Gander,
Urs Hauser, Ivana Kosirova

Vektorgeometrie

1. Auflage 2022 | ca. 320 Seiten | 19,5 × 27 cm | Broschur,
inkl. eLehrmittel | ISBN 978-3-0355-2055-2 | ca. CHF 44.-

Erscheint im Juni 2022

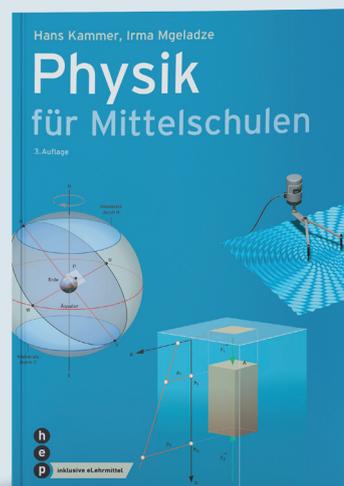
inkl. eLehrmittel



Ruben Mäder, David Kamber

Physik für die Berufsmaturität

3. Auflage 2020 | 344 Seiten | 19,5 × 27 cm | Broschur,
inkl. eLehrmittel | ISBN 978-3-0355-1744-6 | CHF 50.-



Hans Kammer, Irma Mgeladze

Physik für Mittelschulen

3. Auflage 2019 | 448 Seiten | 17 × 24 cm | Broschur,
inkl. eLehrmittel | ISBN 978-3-0355-1435-3 | CHF 56.-

Dazu erhältlich: Arbeitsheft

inkl. eLehrmittel

Überlichtgeschwindigkeit

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

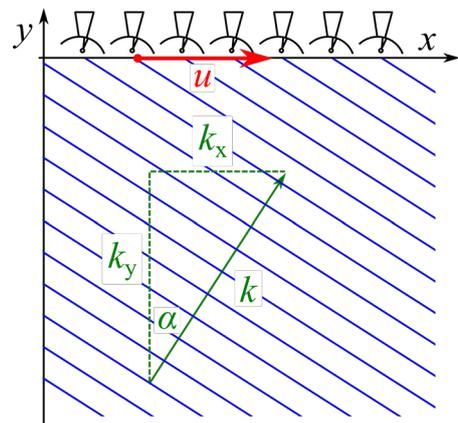
“Nichts ist schneller als das Licht.” Diesen Satz haben Sie sicher schon gehört oder gelesen, sogar meine Schülerinnen und Schüler kennen ihn. Nichtsdestotrotz ist er falsch, sogar wikipedia¹ kennt Ausnahmen. Die Geschwindigkeitsbegrenzung gilt für Materie, Strahlung und Information, aber nicht für alle messbaren Vorgänge. Ein bekanntes Beispiel ist der Leuchtturm: Wenn sich der Lichtkegel dreht, kann der beleuchtete Fleck Überlichtgeschwindigkeit erreichen, wenn nur die beleuchtete Fläche weit genug entfernt ist, z.B. auf dem Mond. Die Bewegung dieses Flecks kann videographiert und anschliessend ausgemessen werden, erfüllt also die gängigen Bedingungen der Objektivierbarkeit. Leider kann man damit nichts anfangen, Kommunikation mit Überlichtgeschwindigkeit ist nicht möglich.

Das nächste Beispiel zeigt, dass Überlichtgeschwindigkeit mit der speziellen Relativitätstheorie kompatibel ist, denn sie erfüllt sogar das Gesetz der Geschwindigkeitstransformation.

2 Antennenarray

Eine Reihe gekoppelter Antennen empfängt eine elektromagnetische Welle von einem weit entfernten Quasar, siehe Abbildung 1. Die Radiowelle sei eben und monochromatisch: $e(x, y, t) = \hat{e} \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$.

Abbildung 1: Ein Array aus Radioantennen empfängt eine ebene Welle. Die Welle habe den Wellenvektor $\vec{k} = (k_x, k_y)$, wobei $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ist. Weiter stellen λ die Wellenlänge, ω die Kreisfrequenz und c die Lichtgeschwindigkeit dar. Der Einfallswinkel α ist durch den Wellenvektor bestimmt: $\sin \alpha = k_x/k$. Wir dürfen zweidimensional rechnen. Betrachten wir eine einzelne Wellenfront, z.B. ein bestimmtes Maximum: Der Wellenberg bewegt sich mit “Phasengeschwindigkeit” u über den Antennenarray. Diese Geschwindigkeit ist objektiv messbar und sie ist grösser als die Lichtgeschwindigkeit.



Mit den Bezeichnungen in Abbildung 1 folgt für die Phase eines Maximums auf der x -Achse ($y = 0$)

$$k_x x + k_y \cdot 0 - \omega t \stackrel{\text{z.B.}}{=} 2\pi \Rightarrow x = \frac{\omega t}{k_x} + \frac{2\pi}{k_x} \Leftrightarrow x = ut + x_0 \Rightarrow u = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k \sin \alpha} = \frac{c}{\sin \alpha} > c \quad (1)$$

Nun wollen wir schauen, was mit dieser Phasengeschwindigkeit u passiert, wenn wir in ein Bezugssystem transformieren, das sich mit Geschwindigkeit $-v$ entlang der x -Achse bewegt. Wir wissen, dass sich dabei die Frequenz (Dopplereffekt) und die Richtung (Aberration) der Welle ändern. Zum Glück ist die Phase der Welle eine relativistische Invariante, denn eine (z.B.) Nullstelle bleibt eine Nullstelle unter einer Lorentztransformation.

Also gilt für die momentane Phase der Welle in zwei verschiedenen Inertialsystemen:

$$k_x x + k_y y - \omega t = k'_x x' + k'_y y' - \omega' t' \quad (2)$$

$$= k'_x \gamma \left(x + vt \right) + k'_y y - \omega' \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3)$$

Da x , y und t unabhängig sind, dürfen wir sie paarweise Null setzen und die Koeffizienten vergleichen:

$$t = 0, x \neq 0, y = 0 \rightarrow k_x = k'_x \gamma - \omega' \gamma \frac{v}{c^2} \quad (4)$$

$$t = 0, x = 0, y \neq 0 \rightarrow k_y = k'_y \quad (5)$$

$$t \neq 0, x = 0, y = 0 \rightarrow \omega = -k'_x \gamma v + \omega' \gamma \quad (6)$$

Die gleichen Beziehungen müssen gelten, wenn wir die Rücktransformation machen und dabei gestrichene Größen mit ungestrichenen und $-v$ mit $+v$ ersetzen.

$$k'_x = \gamma \left(k_x + \omega \frac{v}{c^2} \right) \quad k'_y = k_y \quad \omega' = \gamma (\omega + k_x v) \quad (7)$$

Verwenden wir noch die Beziehung $c = \omega/k = \omega'/k'$, $\sin \alpha = k_x/k$ und $\sin \alpha' = k'_x/k'$, so folgt

$$\omega' = ck' = \gamma (ck + k_x v) \Rightarrow k' = \gamma k (1 + \sin \alpha \cdot v/c) \quad (8)$$

$$k'_x = \gamma \left(k_x + \omega v/c^2 \right) = \gamma (k_x + kv/c) \Rightarrow \sin \alpha' = \frac{k'_x}{k'} = \frac{\gamma (k_x + kv/c)}{\gamma k (1 + \sin \alpha \cdot v/c)} = \frac{\sin \alpha + v/c}{1 + \sin \alpha \cdot v/c} \quad (9)$$

Wie gross ist nun die "Phasengeschwindigkeit" u' der Wellenberge entlang der x' -Achse im neuen System?

$$\sin \alpha = \frac{c}{u} \rightarrow u' = \frac{c}{\sin \alpha'} = \frac{c(1 + \sin \alpha \cdot v/c)}{\sin \alpha + v/c} = \frac{c(1 + c/u \cdot v/c)}{c/u + v/c} = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (10)$$

Die letzte Gleichung ist das übliche, eindimensionale Geschwindigkeitstransformationsgesetz, das auch für subluminaire Bewegungen gilt.

3 Diskussion

Wir sehen also, dass Überlichtgeschwindigkeit nicht nur objektiv messbar ist, sondern dass sie sich auch wie jede andere Geschwindigkeit transformiert. Allerdings ist es nicht möglich, durch eine Lorentztransformation eine Über- in eine Unterlichtgeschwindigkeit zu verwandeln.

Wenn ich mit Relativitätstheorie anfangen, gebe ich meist ein qualitatives Beispiel mit Überlichtgeschwindigkeit zum Besten. Die Schülerinnen und Schüler freut's und mich auch. Wir lernen, einfach anzufangen und bei Bedarf zu präzisieren. Die Ergänzung erfolgt mündlich oder schriftlich.

In der speziellen Relativitätstheorie gibt es viele didaktische Mythen und Altlasten. Ein Beispiel für eine Altlast ist die dynamische Masse: Sie zerstört die wertvolle Idee, dass Masse eine Eigenschaft eines Körpers ist. Sie spart keine Arbeit, denn man muss jedesmal notieren, ob die dynamische oder Ruhemasse gemeint ist. Sie weckt die Fehlvorstellung, dass $F = ma$ immer wahr ist, wenn man die dynamische Masse einsetzt.

Ein Mythos ist, dass das Michelson-Morley Experiment wichtig sei für die Relativitätstheorie. Einstein hat es in seinen berühmten Arbeiten von 1905 jedenfalls nicht zitiert. Bereits 1910 ist die Relativitätstheorie aus den Fängen der Elektrodynamik befreit worden, sie gilt allgemeiner. Ergäbe das Michelson-Morley-Experiment ein positives Resultat, so wäre die Relativitätstheorie nicht tot. Hingegen könnte das Photon z.B. eine Masse haben (analog dem Neutrino). Das c in $E = mc^2$ wäre unverändert, aber verschieden von der Lichtgeschwindigkeit.

¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Überlichtgeschwindigkeit> (Abruf am 5. März 2022)

Go Direct® Sensoren für Graphical Analysis | Pro

Kabellose Sensoren von Vernier

Go Direct® Lichtschranke

In der Go Direct Lichtschranke sind zwei parallele Lichtschranken integriert, mit denen sich ohne Kenntnis der Geometrie des Objektes die Geschwindigkeit und Beschleunigung messen lassen. Ideal für Freifall-, Pendel- und Stossversuche. Mit Hilfe eines optionalen Lasers lassen sich durch die eingebaute zusätzliche Fotozelle nahezu beliebig grosse Gabelweiten realisieren. Eine weitere Go Direct Lichtschranke kann kaskadiert werden.

- Infrarot-Lichtquelle: Spitzenwert bei 880 nm
- Gabelweite: 77,5 mm
- Abstand beider Lichtschranken: 20 mm
- LED-Anzeigen für die Lichtschranke: Lichtstrahl frei / unterbrochen
- Akku: 300 mAh Li-Poly wiederaufladbar
- Akkulaufzeit: ca. 10 Stunden kontinuierliche Datenerfassung

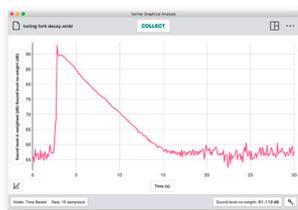
Artikel-Nr. GDX-VPG



Go Direct® Schallpegel- und Soundsensor



Artikel-Nr. GDX-SND



Dieser Schallpegelsensor wird eingesetzt zur Darstellung der Signalformen von Stimmen und Musikinstrumenten. Weitere Anwendungen sind Experimente mit der Schallgeschwindigkeit. Links ist ein Beispiel von einer Stimmgabel mit der Lautstärke, welche mit der Zeit abnimmt.

- Resonanz: A- oder C-bewertet
- Reichweite: 55-110 dB
- Genauigkeit: ± 3 dB
- Auflösung: 0,1 dB
- Schallpegel Frequenzbereich: 30-10.000 Hz
- Mikrofonpegel Frequenzbereich: 100 Hz bis 15 kHz
- Typische maximale Frequenz: 10.000 Hz

Go Direct® Beschleunigungsmesser



Artikel-Nr. GDX-ACC

Sammeln Sie Beschleunigungs-, Rotations- und Höhendaten im Klassenzimmer oder im Gelände mit dem Go Direct Beschleunigungssensor. Montieren Sie den Beschleunigungssensor an Ihrem Fahrrad oder befestigen Sie ihn ohne störende Kabel an Ihrem Laborwagen.

Messbereich:

- Geringe Beschleunigung: ± 157 m/s² (± 16 g)
- Hohe Beschleunigung: $\pm 1,960$ m/s² (± 200 g)
- Gyros: $\pm 2,000$ °/s, Winkel: ± 180 °
- Höhenmesser: -1,800m bis 10,000 m

Go Direct® Charge Station



Artikel-Nr. GDX-CRG

Die Go Direct Ladestation ist die perfekte Lösung zum aufladen Ihrer Go Direct Sensoren. Jede Ladestation hat 16 Ladeanschlüsse, 8 USB- und 8 Sensor-Ports. LEDs an den Go Direct-Sensoren zeigen den Ladezustand an. Die Station kann auch zum Laden von Go Wireless®-Geräten verwendet werden.

*Go Direct® Sensoren sind nicht mit Logger Pro 3 kompatibel.

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online-Shop unter www.educatec.ch

Go Direct™

EducaTec AG
Kanzleigasse 2
5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61
contact@educatec.ch
www.educatec.ch

educatec

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP – SSPMP – SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger praesident@dmk.vsmf.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53
2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@edu.ge.ch
Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 150 31.07.2022 (Ende September)
Nr. 151 30.11.2022 (Ende Januar)
Nr. 152 31.03.2023 (Ende Mai)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica